

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”***Ediția a XXVIII-a***ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026****XI. osztály - H2 - Természettudomány****1. Feladat (20 pont)**

Adottak az $AB - BA = A$ tulajdonsággal rendelkező $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixok.

- Igazold, hogy $\text{tr}(A) = 0$.
- Bizonyítsd be, hogy $ABA = O_2$.

2. Feladat (20 pont)

Adottak az $A(-1, 6)$, $B(1, -3)$, $C(9, 0)$ és $D(4, 10)$ pontok.

- Számítsd ki az $ABCD$ négyszög területét!
- Határozd meg az $ABCD$ négyszög síkjában levő P pontok halmazát úgy, hogy a PAB és PCD háromszögek területe egyenlő legyen!

3. Feladat (20 pont)

- Igazold a $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x < 0, \forall x \in (0, 1)$ egyenlőtlenséget!
- Adott az $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $f(0)f(1) < 0$. Igazold, hogy létezik egy olyan $c \in (0, 1)$ szám, amelyre $-\frac{1}{4} \leq f(c) + f(c^2) < 0$.

4. Feladat (30 pont)

Két-kisbolygó, Asterix és Obelix, ugyanabban a síkban helyezkedik el, és az $x_0 = 0$ pillanatban indulva, az alábbi mozgástörvényeket írják le: Asterix pályája $f(x) = \frac{2ax + a + 2}{2x + 1}$, $x \in [0, +\infty)$ és Obelix pályája

$$g(x) = \frac{4ax^2 + 5x + 3}{bx^2 + 4}, \quad x \in [0, +\infty), \text{ ahol } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Egy adott pillanatban a két kisbolygó összeütközik, de tovább követik pályájukat.

- Határozd meg az $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ valós paramétereket tudva, hogy az ütközés után a pályáknak az $y = 1$ egyenletű egyenes aszimptotája!
- Az a) pontban meghatározott a és b esetén határozd meg, hogy a kiindulási időtől számítva mikor ütközik össze a két kisbolygó? Az időegységet órában mérjük.

Megjegyzés:

Munkaidő 3 óra; minden tétel kötelező; hivatalból 10 pontot jár
A maximális pontszám 100 pont.